Αριθμητική Επίλυση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων, Ασκήσεις 2ου Κεφαλαίου

Διδάσκων: Μιχάλης Ξένος,
email : *mxenos@cc.uoi.gr*

30 Νοεμβρίου 2015

1. Να βρεθεί με τη μέθοδο του *Euler* η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x}{y}, \quad x \in [0,1], \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων στο σημείο $x = 1$ και με βήμα $h = 0.2$. Να συγκριθεί η τιμή που προκύπτει από την μέθοδο με την αντίστοιχη αναλυτική λύση.

Υπόδειξη: Η προσεγγιστική λύση με την μέθοδο του *Euler* είναι 1.3550, ενώ η τιμή που προκύπτει από την αναλυτική λύση είναι 1.4142.

2. Να αποδείξετε το Θεώρημα εκτίμησης σφάλματος της μεθόδου του *Euler* για συστήματα Σ.Δ.Ε.: Έστω $f : [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ μια συνάρτηση η οποία πληροί τη συνθήκη του *Lipschitz* ως προς y, ομοιόμορφα ως προς t, ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$ του $\mathbb{R}^m$. Έστω $y = (y_1, y_2, ..., y_m)^T$, $y_i \in C^2[\alpha, \beta]$, $i = 1, 2, ..., m$, η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \ \ \alpha \le t \le \beta, \\ y(\alpha) = y_0. \end{cases}$$

Αν $y^0, ..., y^N$ είναι οι προσεγγίσεις των $y(t^n)$, τις οποίες δίνει η μέθοδος του *Euler* ως προς τον ομοιόμορφο διαμερισμό του $[\alpha, \beta]$ με βήμα $h = (\beta - \alpha)/N$, τότε ισχύει:

$$\max_{0 \le n \le N} \|y(t^n) - y^n\| \le \frac{M}{2L} C_1 \left[\mathrm{e}^{L(\beta - \alpha)} - 1 \right] h, \tag{1}$$

όπου $M = \max\limits_{\alpha \le t \le \beta} \|y''(t)\|_\infty$.

Υπόδειξη: Η εμφάνιση της σταθεράς C_1 στην εκτίμηση (1) οφείλεται στο γεγονός ότι η παράσταση του υπολοίπου του αναπτύγματος *Taylor* με την τιμή μιας κατάλληλης παραγώγου σε ένα ενδιάμεσο σημείο δεν ισχύει για διανυσματικές συναρτήσεις. Πράγματι, στη διανυσματική περίπτωση, η αντίστοιχη της σχέσης:

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + hy'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi^n),$$

της βαθμωτής περίπτωσης, είναι:

$$y_i(t^{n+1}) = y_i(t^n) + hy_i'(t^n) + \frac{h^2}{2} y_i''(\xi_i^n),$$

με $\xi_i^n \in (t^n,\, t^{n+1})$. Συνεπώς, η αντίστοιχη παράσταση στην προκειμένη περίπτωση είναι:

$$y_i(t^{n+1}) = y_i(t^n) + hf_i(t^n, y(t^n)) + \frac{h^2}{2} y_i''(\xi_i^n),$$

3. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) + y(t), & t \in [0,1], \\ y'(t) = 2x(t) - 2y(t), & t \in [0,1], \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{2}$$

(α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $[x(\cdot)]^2 + [y(\cdot)]^2$ είναι φθίνουσα. (β) Διακριτοποιούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών (2) με την πεπλεγμένη μέθοδο του *Euler*, χρησιμοποιώντας έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του διαστήματος $[0,\, 1]$ με βήμα h. Αποδείξτε, με τους συνηθισμένους συμβολισμούς, ότι:
$(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 \le (x^n)^2 + (y^n)^2$.
Υπόδειξη: Ο πίνακας $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ είναι αρνητικά ορισμένος.

4. Διακριτοποιούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y' = -\mathrm{e}^y, & t \in [0,1], \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

με την πεπλεγμένη μέθοδο του *Euler*, με βήμα h. Αποδείξτε ότι οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

5. Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $f'(x) \leq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x, $x \in \mathbb{R}$. Διακριτοποιούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y' = f(y(t)), \quad t \in [\alpha, \beta], \\ y(\alpha) = y_0. \end{cases}$$

με τη μέθοδο του τραπεζίου, θεωρώντας έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του διαστήματος $[\alpha, \beta]$. Αποδείξτε ότι οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

6. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 10y(t)\left(1 - \dfrac{y(t)}{1000}\right), \quad t \in [0, 2], \\ y(0) = 100. \end{cases} \tag{3}$$

(α) Να επιλυθεί αναλυτικά το πρόβλημα αρχικών τιμών (3). (β) Να υλοποιηθεί υπολογιστικό πρόγραμμα που να χρησιμοποιεί την μέθοδο του *Euler*, με βήματα $h = 0.1$, 0.15, 0.2 και 0.25. Να εξετάσετε πώς αυτές οι προσεγγιστικές λύσεις προσεγγίζουν την ακριβή λύση του προβλήματος. Να αναπαραστήσετε γραφικά την αναλυτική λύση και τις προσεγγιστικές λύσεις για τα διάφορα βήματα. Τι παρατηρείτε όσο αυξάνεται το βήμα h; Γιατί παρατηρείται αυτή η συμπεριφορά;

Υπόδειξη: Η αναλυτική λύση του πρόβλημα αρχικών τιμών (3) είναι η:
$y(t) = \dfrac{1000}{9\mathrm{e}^{-10x} + 1}$.

7. Να υλοποιηθεί υπολογιστικό πρόγραμμα που να χρησιμοποιεί τη μέθοδο του *Euler*, την πεπλεγμένη μέθοδο του *Euler* και τη μέθοδο του τραπεζίου για ομοιόμορφο διαμερισμό με βήμα $h = 0.1$, για το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), \quad t \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Θεωρήστε ότι $\lambda < 0$. Ποιές είναι οι περιοχές απόλυτης ευστάθειας για τις τρείς μεθόδους βάσει του λ που έχετε επιλέξει; Να δώσετε σε μορφή πίνακα τις προσεγγίσεις που δίνει η κάθε μέθοδος και να υπολογίσετε το δ^n για κάθε μια από αυτές σε κάθε υπολογιστικό βήμα για $n = 0, 1, 2, \ldots$.

8. Έστω $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Διακριτοποιούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y'(t) = -(y(t))^3 + \phi(t), \quad t \in [0, 1], \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

με τη μέθοδο του τραπεζίου, θεωρώντας έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του διαστήματος $[0,\, 1]$ με βήμα h. Αποδείξτε ότι οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

9. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 0, \quad t \in [0,\, 2\pi], \\ y(0) = 1,\; y'(0) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

(α) Να επιλυθεί αναλυτικά το πρόβλημα αρχικών τιμών (4). (β) Να υλοποιηθεί υπολογιστικό πρόγραμμα που να χρησιμοποιεί την μέθοδο του *Euler* και την μέθοδο του μέσου, με βήμα $h = 0.1$. Να εξετάσετε πώς αυτές οι προσεγγιστικές λύσεις προσεγγίζουν την ακριβή λύση του προβλήματος. Να αναπαραστήσετε γραφικά την αναλυτική λύση και τις προσεγγιστικές λύσεις.

Οι ασκήσεις μπορούν να επιστραφούν και μέσω email(mxenos@cc.uoi.gr) μέχρι την ημέρα εξέτασης του μαθήματος.

Βιβλιογραφία:

Αριθμητικές Μέθοδοι για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Γ.Δ. Ακρίβης, Β.Α. Δουγαλής, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2η έκδοση, 2013.

Αριθμητική Ανάλυση: Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Μ.Ν. Βραχάτης, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα, 2012.